ИК

ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

КИЕВ - 1976

Приведем асимптотические оценки дисперсии $D(\mathcal{T}_n)$ для некоторых значений m при $n \longrightarrow \infty$

$$m=2 \qquad D(\mathcal{T}_n) \sim \ln n;$$

$$m=3 \qquad D(\mathcal{T}_n) \sim \left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\ln^2 n;$$

$$m=4 \qquad D(\mathcal{T}_n) \sim \left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{i^3}+\sum_{2}^{n}\frac{1}{i^2}\sum_{j<i}\frac{1}{j}+\frac{1}{6}\right)\ln^3 n.$$

В работе [3] приводится вывод для $D(\mathcal{T}_n)$ комбинаторным методом для случая размерности m = 3, при этом распространение такого подхода на случай большей размерности представляется бесперспективным из-за сложности метода.

Литература

1. В.М.Иванин, Об одной оценке математического ожидания числа элементов множества Парето, журн. "Кибернетика", № 3, 1975.

2. А.И.Кукса, Н.З.Шор, О методе оценки количества условно-оптимальных траекторий дискретного сепарабельного динамического программирования, журн. "Кибернетика", № 6, 1972.

3. O.Barndorff-Nielsen, M.Sobel, On the Distribution of the Number of Admissible Points in a Vector Random Sample, журн. "Теория вероятностей и ее применение", т.XI, вып.2, 1966.

Доложено в ~~феврале~~ апреле 1976 г на семинаре в И.К. у Шора Н.З.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.М.Альт

1. Определения и свойства классов функций G, G^* и $\mathcal{L}_n$

Пусть Z, N - множества целых и натуральных чисел соответственно. Тогда для всякого $n \in N$ Z^n обозначим множество $\{(t_1,\dots,t_n)/t_i \in Z, i=1,\dots,n\}$; $Map(Z^n,Z)$ обозначим множество всех функций из Z^n в Z.

Будем говорить, что $f: Z \longrightarrow Z$ убывает (возрастает), если для всяких $t', t'' \in Z$, таких, что $t' < t''$, будет $f(t') \geq f(t'')$ ($f(t') \leq f(t'')$).

Пусть $n \geq 1$, тогда для всякого $\tau = (t_1,\dots,t_{n-1}) \in Z^{n-1}$ и всякого $i \in J_n = \{1,\dots,n\}$ обозначим $h_{i\tau}$ вложение Z в Z^n, определенное следующим образом: $h_{i\tau}(t) = (t_1,\dots,t_{i-1},t,t_i,\dots,t_{n-1})$.

Будем говорить, что $f: Z^n \longrightarrow Z$ убывает (возрастает) по каждому аргументу, если для всякого $\tau \in Z^{n-1}$ и всякого $i \in J_n$ функция $f_0 h_{i\tau}: Z \longrightarrow Z$ убывает (возрастает).

Обозначим e тождественное отображение из Z в Z.

Определение 1. $G = \{g/g \in Map(Z,Z)$, g убывает, $e+g$ возрастает$\}$.

Определение 2. $G^* = \{g/g \in Map(Z,Z)$, g возрастает, $g-e$ убывает$\}$.

Отображение $g \longrightarrow e+g : G \longrightarrow G^*$ задает изоморфизм множеств G и G^* ($g \longrightarrow g-e : G^* \longrightarrow G$ - обратное отображение).

Сформулируем в виде предложений некоторые полезные свойства функций классов G и G^*.

Предложение 1.1. Имеют место следующие эквивалентности:

1. $f \in G \Longleftrightarrow \forall (t', t'' \in Z)[t' < t'' \Longrightarrow 0 \leq f(t') - f(t'') \leq t'' - t']$.

2. $f \in G^* \Longleftrightarrow \forall (t', t'' \in Z)[t' < t'' \Longrightarrow 0 \leq f(t'') - f(t'') \leq t'' - t']$.

Предложение 1.2. Имеют место следующие импликации:

1. $f\in G$ и $g\in G \Longrightarrow f\circ g\in G^*$.
2. $f\in G^*$ и $g\in G^* \Longrightarrow f\circ g\in G^*$.
3. $f\in G$ и $g\in G^* \Longrightarrow f\circ g\in G$ и $g\circ f\in G$.

Для всякой $f\in Map(Z^n, Z)$ обозначим $\bar f$ функцию из Z^n в Z, определенную следующим образом: $(t_1,\ldots,t_n)\longmapsto \bar f(t_1,\ldots,t_n)=t_n+f(t_1,t_2-t_1,\ldots,t_n-t_{n-1})$. Отсюда следует, что $t_1+\cdots+t_n+f(t_1,\ldots,t_n)=\bar f(s_1,s_2,\ldots,s_n)$, где $s_1=t_1$, $s_2=t_1+t_2,\ldots,s_n=t_1+\cdots+t_n$.

Определение 3. Для всякого $n\in N$ определим множество $\mathcal{L}_n$: $\mathcal{L}_n=\{f/f\in Map(Z^n,Z)$, f убывает, а $\bar f$ возрастает по каждому аргументу $\}$.

Заметим, что $\mathcal{L}_1=G$, т.е. для $n\geq 1$ $\mathcal{L}_n$ является обобщением класса G.

Лемма 1.1. Пусть $f\in\mathcal{L}_n$, $n\geq 1$, тогда для всякого $\tau\in Z^{n-1}$ и всякого $i\in\mathcal{J}_n$ имеем

1. $f\circ h_{i\tau}\in G$.
2. $\bar f\circ h_{i\tau}\in G^*$.

Доказательство.

1. $t+(f\circ h_{i\tau})(t)=t+f(t_1,\ldots,t_{i-1},t,t_i,\ldots,t_{n-1})=$

$=t_1+\cdots+t_{i-1}+t+t_i+\cdots+t_{n-1}+f(t_1,\ldots,t_{i-1},t,t_i,\ldots,t_{n-1})-$

$-t_1-\cdots-t_{i-1}-t_i-\cdots-t_{n-1}=\bar f(s_1,s_2,\ldots,s_{i-1},t+s_i,t+s_{i+1},\ldots,t+s_{n-1})-s_{n-1}$

и, следовательно, $\ell+f\circ h_{i\tau}$ является возрастающей функцией. Так как по определению 3 $f\circ h_{i\tau}$ убывающая, то $f\circ h_{i\tau}\in G$.

2. Согласно определению 3 $\bar f\circ h_{i\tau}$ возрастает. Покажем, что $\bar f\circ h_{i\tau}-\ell$ убывает. Пусть $i=n$, тогда

$\bar f(t_1,\ldots,t_{n-1},t)=t+f(t_1,t_2-t_1,\ldots,t_{n-1}-t_{n-2},t-t_{n-1})$,

но $f(t_1,t_2-t_1,\ldots,t_{n-1}-t_{n-2},t-t_{n-1})$ убывает по t, значит, $\bar f\circ h_{n\tau}\in G^*$. Пусть теперь $1\leq i<n$ и $t'<t''$, тогда

$0\leq\bar f(t_1,\ldots,t_{i-1},t'',t_i,\ldots,t_{n-1})-\bar f(t_1,\ldots,t_{i-1},t',t_i,\ldots,t_{n-1})=$
$=f(\ldots,t''-t_{i-1},t_i-t'',\ldots)-f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t',\ldots)$.

Здесь $f(\ldots,t-t_{i-1},t_i-t,\ldots)$ является сокращением записи $f(t_1,t_2-t_1,\ldots,t_{i-1}-t_{i-2},t-t_{i-1},t_i-t,t_{i+1}-t_i,\ldots,t_{n-1}-t_{n-2})$. Далее имеем

$f(\ldots,t''-t_{i-1},t_i-t'',\ldots)-f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t',\ldots)=$
$=(f(\ldots,t''-t_{i-1},t_i-t'',\ldots)-f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t'',\ldots))+(f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t'',\ldots)-$
$-f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t',\ldots))\leq f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t'',\ldots)-f(\ldots,t'-t_{i-1},t_i-t',\ldots)$,

так как первая скобка не положительна. С другой стороны, вторая скобка не превосходит $t_i-t'-(t_i-t'')=t''-t'$ на основании утверждения 1 леммы 1.1 и утверждения 1 предложения 1.1. Значит, $0\leq(\bar f\circ h_{i\tau})(t'')-(\bar f\circ h_{i\tau})(t')\leq$ $\leq t''-t'$ и согласно утверждению 2 предложения 1.1 имеем $\bar f\circ h_{i\tau}\in G^*$.

Для всякого $f\in\mathcal{L}_n$, $n\geq 1$, определим функцию $\hat f: Z^{n+1}\longrightarrow Z$ следующим образом: $\hat f(t_1,t_2,\ldots,t_{n+1})=$ $=t_1+\bar f(t_2-t_1,t_3-t_1,\ldots,t_{n+1}-t_1)$. Тогда, учитывая, что $\bar f(t_2-t_1,t_3-t_1,\ldots,t_{n+1}-t_1)=t_{n+1}-t_1+f(t_2-t_1,t_3-t_2,\ldots,t_{n+1}-t_n)$, получим $\hat f(t_1,t_2,\ldots,t_{n+1})=t_{n+1}+f(t_2-t_1,t_3-t_2,\ldots,t_{n+1}-t_n)$.

Лемма 1.2. Пусть $f\in\mathcal{L}_n$, $n\geq 1$, тогда для всякого $\tau\in Z^n$ и всякого $i\in\mathcal{J}_{n+1}$, $\hat f\circ h_{i\tau}\in G^*$.

Доказательство. 1. Пусть $i=1$, тогда $(\hat f\circ h_{1\tau})(t)=$ $=f(t_1-t,t_2-t_1,\ldots,t_n-t_{n+1})+t_n$ и, значит, $\hat f\circ h_{1\tau}$ возрастает. С другой стороны, $(\hat f\circ h_{1\tau})(t)-t=$ $=t+\bar f(t_1-t_1,t_2-t,\ldots,t_n-t)-t$ и, значит, $f\circ h_{1\tau}-\ell$ убывает. Следовательно, $\hat f\circ h_{1\tau}\in G^*$.

2. Пусть теперь $i\geq 1$, тогда $(\hat f\circ h_{i\tau})(t)=t_1+$ $+\bar f(t_2-t_1,\ldots,t_{i-1}-t_1,t-t_1,t_i-t_1,\ldots,t_n-t_1)$.

Обозначим t_i-t_1 через t'_{i-1}, $i=2,\ldots,n$, $i-1$ через i' для $i=2,\ldots,n$ и $t-t_1$ через t', тогда $(\hat f\circ h_{i\tau})(t)=t_1+(\bar f\circ h_{i'\tau'})(t')$ и, значит, на основании утверждения 2 предложения 1.2 $\hat f\circ h_{i\tau}\in G^*$.

Для всякого семейства $\{g_i: Z\longrightarrow Z/i=1,\ldots,m\}$ обозначим $(g_1,\ldots,g_m)$ отображение из Z в Z^m, определенное соответствием $t\longrightarrow(g_1(t),\ldots,g_m(t))=$ $=(g_1,\ldots,g_m)(t)$.

Лемма 1.3. Пусть $f\in\mathcal{L}_n$, $n\geq 1$ и $v,u_1,\ldots,u_n\in G^*$ тогда:

1. $\bar f\circ(u_1,\ldots,u_n)=u_n+f\circ(u_1,u_2-u_1,\ldots,u_n-u_{n-1})\in G^*$.
2. $\hat f\circ(v,u_1,\ldots,u_n)=u_n+f\circ(u_1-v,u_2-u_1,\ldots,u_n-u_{n-1})\in G^*$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\bar{f}\circ(u_1,\ldots,u_n)-\ell$ и $\hat{f}\circ(v,u_1,\ldots,u_n)-\ell$ убывающие функции, так как $\bar{f}\circ(u_1,\ldots,u_n)$ и $\hat{f}\circ(v,u_1,\ldots,u_n)$ – возрастающие функции (непосредственно следует из леммы 1.1 и леммы 1.2)

1. $\bar{f}(u_1(t),\ldots,u_n(t))-t=-t+\bar{f}(u_1(t)-t+t,\ldots,u_n(t)-t+t)=$
$=\hat{f}(-t,u_1(t)-t,\ldots,u_n(t)-t)$ и так как
$-e,u_1-e,\ldots,u_n-e\in G$, то $\hat{f}\circ(-e,u_1-e,\ldots,u_n-e)=$
$=\bar{f}\circ(u_1,\ldots,u_n)-e$ – убывающая функция.

2. $\hat{f}(v(t),u_1(t),\ldots,u_n(t))-t=v(t)-t+$
$+\bar{f}(u_1(t)-v(t),\ldots,u_n(t))-v(t)=v(t)-t+$
$+\bar{f}(u_1(t)-t-(v(t)-t),\ldots,u_n(t)-t-(v(t)-t))=$
$=\hat{f}(v(t)-t,u_1(t)-t,\ldots,u_n(t)-t)=$
$=(\hat{f}\circ(v-e,u_1-e,\ldots,u_n-e))(t)$ и так как
$v-e,u_1-e,\ldots,u_n-e\in G$, то $\hat{f}\circ(v,u_1,\ldots,u_n)-e=$
$=\hat{f}\circ(v-e,u_1-e,\ldots,u_n-e)$ – убывающая функция.

Заметим, что если $f\in Map(Z^n,Z)$, $n\geq 1$, то
$t+t_1+\cdots+t_n+f(t_1,\ldots,t_n)=\hat{f}(t,s_1+t,\ldots,s_n+t)$.
Действительно, $t+t_1+\cdots+t_n+f(t_1,\ldots,t_n)=t+f(s_1,\ldots,s_n)=$
$=t+\bar{f}(s_1+t-t,\ldots,s_n+t-t)=\hat{f}(t,s_1+t,\ldots,s_n+t)$.
Отсюда, в частности, следует, что если $p\geq n$, то
$t_1+t_2+\cdots+t_p+f(t_{p-n+1},\ldots,t_p)=\hat{f}(s_{p-n},s_{p-n+1},\ldots,s_p)$.
Таким образом,

$$t_1+\cdots+t_p+f(t_{p-n+1},\ldots,t_p)=\begin{cases}\bar{f}(s_1,\ldots,s_n) & \text{при } p=n;\\ \hat{f}(s_{p-n},\ldots,s_p) & \text{при } p>n.\end{cases}$$

Пусть зафиксированы некоторое $n\in N$ и отображение $q:J_n\longrightarrow J_n$ такое, что $1\leq q(i)\leq i$ для всякого

$i\in J_n$. Последовательность $\{f_i/f_i\in Map(Z^{q(i)};Z),\ i\in J_n\}$ обозначим F_{nq} и если $\forall(i\in J_n)[f\in\mathcal{Z}_{q(i)}]$, то будем говорить, что F_{nq} принадлежит $\mathcal{Z}$ ($F_{nq}\subset\mathcal{Z}=\bigcup\limits_{i=1}\mathcal{Z}_i$).

Для всякой последовательности F_{nq} построим последовательность $Q(F_{nq})=\{Q_0,Q_1,\ldots,Q_n\}$, а именно положим $Q_k=a_0+a_1+\cdots+a_k$, $k\in\{0\}\cup J_n$, где $a_0=\ell$, $a_i=f_i\circ(a_{i-q(i)},\ldots,a_{i-1})$ и $i=1,\ldots,n$.

Лемма 1.4. $F_{nq}\subset\mathcal{Z}\Longrightarrow Q(F_{nq})\subset G^*$.

Доказательство. (Индукция по $k\in\{0\}\cup J_n$)
1. $k=0$, тогда $Q_0=\ell\in G^*$.
2. $k>0$, предположим $\forall(i<k)[Q_i\in G^*]$. Тогда
$$Q_k=a_0+a_1+\cdots+a_{k-1}+f_k\circ(a_{k-q(k)},\ldots,a_{k-1})=$$
$$=\begin{cases}f_k\circ(Q_0,\ldots,Q_{k-1}) & \text{при } q(k)=k\\ f_k\circ(Q_{k-q(k)-1},\ldots,Q_{k-1}) & \text{при } q(k)<k.\end{cases}$$
и согласно лемме 1.3 $Q_k\in G^*$. Следовательно, $Q(F_{nq})\subset G^*$.

Пусть $g\in Map(Z,Z)$. Множество $\{t/t\in\{a\div b\}$ и $g(t)=g(b)\}$ обозначим $d_g(a,b)$, а $\min\{t/t\in d_g(a,b)\}$ – через t_0: ($\{a\div b\}=\{a,a+1,\ldots,b\}$).

Лемма 1.5. Пусть $g\in G^*$, тогда $d_g(a,b)=\{t_0\div b\}$.

Доказательство. Пусть $t\in\{t_0\div b\}$, тогда $0\leq g(t)-g(t_0)\leq t-t_0$ и $0\leq g(b)-g(t)\leq b-t$.
Отсюда получим $g(b)\leq g(t)\leq g(b)+t-t_0$ и $g(b)-b+t\leq g(t)\leq g(b)$ и, значит, $g(t)=g(b)$.

Определим последовательность $\delta_0,\delta_1,\ldots,\delta_n,\ldots$ следующим образом: $\delta_0=a$, $\delta_i=g(b)-g(\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{i-1})$ для $i\geq 1$.

Лемма 1.6. Пусть i_0+1 – номер первого, равного нулю, члена последовательности $\{\delta_i\}$, тогда $t_0=\delta_0+\delta_1+\cdots+\delta_{i_0}$.

Доказательство. Обозначим $\delta_0+\cdots+\delta_{i_0}=t'$. Очевидно, что $g(t')=g(b)$.

Возможны два случая:
1. $i_0+1=1$, т.е. $\delta_1=0$. Отсюда $g(b)=g(a)$, т.е. $t'=a=t_0$.
2. $i_0+1>1$, т.е. $i_0\geq 1$. Предположим противное утверждению леммы, т.е. $\exists(t''\in\{a\div t-1\})[g(t'')=g(b)]$ (t' – не минимальный корень).

Покажем, что $\forall (i \geq 1)[a \leq \delta_0 + \delta_1 + \cdot \cdot \cdot + \delta_i \leq t'']$ (по индукции).

1. $i = 1$. Из того, что $g \in G^*$, имеем $\delta_1 = g(b) - g(a) = g(t'') - g(a)$; отсюда $0 \leq \delta_1 \leq t'' - a$ и, значит, $a \leq \delta_0 + \delta_1 \leq t''$.

2. Предположим, что $a \leq \delta_0 + \cdot \cdot \cdot + \delta_{i-1} \leq t''$. Отсюда $\delta_i = g(b) - g(\delta_0 + \dots + \delta_{i-1}) = g(t'') - g(\delta_0 + \cdot \cdot \cdot + \delta_{i-1})$. Так как $g \in G^*$, имеем $0 \leq \delta_i \leq t'' - \delta_0 - \cdot \cdot \cdot - \delta_{i1}$ и, значит, $a \leq \delta_0 + \cdot \cdot \cdot + \delta_i \leq t''$. Но $t' = \delta_0 + \cdot \cdot \cdot + \delta_{i_0}$, следовательно, имеем $a \leq t' \leq t''$ и одновременно, $t' > t''$.

Полученное противоречие доказывает лемму.

2. Постановка и решение задачи

Пусть задана некоторая последовательность F_{nq} и пусть $f_0 \in \{0\} \cup N$. Добавим к F_{nq} число f_0 и полученную последовательность $\{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ обозначим Ψ_{nq}.

Пусть $\tau \in Z^{n+1}$, т.е. $\tau = (t_1, \dots, t_{n+1})$. Обозначим $(t_1, \dots, t_i)$ через τ_i для $i \in J_{n+1}$ и $f_i(t_{i-q(i)+1}, \dots, t_i)$ – через $f_i(\tau_i)$. Обозначим $D(\Psi_{nq})$ множество $\{\tau / \tau \in Z^{n+1}$ и $pr_1 \tau \in \{0 \div f_0\}$, $pr_i \tau \in \{0 \div f_{i-1}(\tau_{i-1})\}$ для $i = 2, \dots, n+1\}$, т.е. $D(\Psi_{nq})$ эффективно задано, и определим функцию $\langle\ \rangle : D(\Psi_{nq}) \longrightarrow Z$ $(\tau \longrightarrow \langle \tau \rangle = pr_1 \tau + \dots + pr_{n+1} \tau)$.

Задача заключается:

1. В эффективном вычислении числа $\Lambda(\Psi_{nq}) = \max\{\langle \tau \rangle / \tau \in D(\Psi_{nq})\}$.

2. В эффективном задании множества
$$\tilde{D}(\Psi_{nq}) = \{\tau / \tau \in D(\Psi_{nq}) \text{ и } \langle \tau \rangle = \Lambda(\Psi_{nq})\}.$$

Число $n+1$ мы назовем размерностью задачи, а саму задачу обозначим $Z(\Psi_{nq})$. Пусть $f : Z^m \longrightarrow Z$ – некоторая произвольная функция, тогда для всякого фиксированного $t \in Z$ обозначим $f(t)$ число (результат подстановки $t_1 = t$), если $m = 1$, и функцию из Z^{m-1} в Z, определенную соответствием $(t_1, \dots, t_{m-1}) \longmapsto f(t)(t_1, \dots, t_{m-1}) = f(t, t_1, \dots, t_{m-1})$, если $m > 1$.[1)]

1) $f \in \mathcal{Z}_m \Longrightarrow f(t) \in \mathcal{Z}_{m-1}$, так как $\overline{f(t)}(t_1, \dots, t_{m-1}) = \bar{f}(t, t_1 + t, \dots, t_{m-1} + t) - t$.

Для всякого фиксированного $t \in \{0 \div f_0\} \overset{def}{=} d$ обозначим $S_t(F_{nq})$ последовательность $\{f_2(t), \dots, f_n(t)\}$ и $S_t(\Psi_{nq})$ последовательность $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$. Ясно, что $S_t(F_{nq})$ при каждом фиксированном t представляет собой некоторую последовательность $F_{n-1,q'}$, где $q' : J_{n-1} \longrightarrow J_{n-1}$,

$$q'(i) = \begin{cases} q(i) - 1, & \text{если } q(i) = i; \\ q(i), & \text{если } q(i) < i. \end{cases}$$

Поэтому определена задача $Z(S_t(\Psi_{nq}))$ размерности n, которую обозначим $S_t(Z(\Psi_{nq}))$ и назовем сечением задачи $Z(\Psi_{nq})$.

Условимся, в пределах одной последовательности Ψ_{nq}; вместо $D(\Psi_{nq})$, $\tilde{D}(\Psi_{nq})$, $\Lambda(\Psi_{nq})$, $D(S_t(\Psi_{nq}))$, $\tilde{D}(S_t(\Psi_{nq}))$, $\Lambda(S_t(\Psi_{nq}))$ писать соответственно D, $\tilde{D}$, Λ, D_t, $\tilde{D}_t$, Λ_t. Обозначим $\tilde{d}$ множество $\{t / t = pr_1 \tau \text{ и } \tau \in \tilde{D}\}$. Заметим, что $D = \bigcup_{t \in d} \{t\} \times D_t$. Для множества $\tilde{D}$ имеет место аналогичное разложение.

Лемма 2.1. $\tilde{D} = \bigcup_{t \in \tilde{d}} \{t\} \times \tilde{D}_t$.

Доказательство. 1. Пусть $\tau \in \tilde{D} / \tau = (t_1, t_2, \dots, t_{n+1})$. Тогда $t_1 \in \tilde{d}$. Покажем, что $(t_2, \dots, t_{n+1}) \in \tilde{D}_{t_1}$. Пусть $(t'_2, \dots, t'_{n+1}) \in D_{t_1}$, тогда $(t'_2 + \dots + t'_{n+1} \leq t_2 + \dots + t_{n+1}$. Действительно, если мы предположим, что $t_2 + \dots + t_{n+1} < t'_2 + \dots + t'_{n+1}$, то $t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} < t_1 + t'_2 + \dots + t'_{n+1}$. Но $(t_1, t'_2, \dots, t'_{n+1}) \in D$, так как $(t'_2, \dots, t'_{n+1}) \in D_{t_1}$ и $D = \bigcup_{t \in d} \{t\} \times D_t$, а $t_1 \in \tilde{d} \subset d$. Значит, $\tau \notin \tilde{D}$, т.е. противоречие.

Таким образом, $\tilde{D} \subset \bigcup_{t \in \tilde{d}} \{t\} \times D_t$.

2. Пусть $t \in \tilde{d}$ и пусть $(t_1, \dots, t_n) \in \tilde{D}_t$. Так как $t \in \tilde{d}$, то существует $\tau \in \tilde{D}$ такой, что $pr_1 \tau = t$. Будем считать, что $\tau = (t, t'_1, \dots, t'_n)$. Но тогда $(t'_1, \dots, t'_n) \in D_t$. Следовательно, $t'_1 + \dots + t'_n = t_1 + \dots + t_n = \Lambda_t$ и, значит, $t + t'_1 + \dots + t'_n = t + t_1 + \dots + t_n = \langle \tau \rangle = \Lambda$. Отсюда $(t, t_1, \dots, t_n) \in \tilde{D}$. Таким образом, $\bigcup_{t \in \tilde{d}} \{t\} \times \tilde{D}_t \subset \tilde{D}$ и, значит, $\tilde{D} = \bigcup_{t \in \tilde{d}} \{t\} \times \tilde{D}_t$.

Теорема 2.1. Для любой последовательности $\Psi_{nq} = \{f_0\} \cup F_{nq}$, такой, что $F_{nq} \subset \mathcal{Z}$ и $D(\Psi_{nq}) \neq \emptyset$, вектор $\alpha=(a_0,a_1,\ .\ .\ .\ .\ ,a_n)(f_0)$ является решением задачи $Z(\Psi_{nq})$, т.е. $\langle\alpha\rangle=\Lambda(\Psi_{nq})=Q_n(f_0)$.

Доказательство. (Индукция по размерности задачи).

1. Пусть $n=1$, тогда $\Psi_{nq}=\{f_0,f_1\}$, где $f_1\in G$ и $q\equiv 1$. $D=\{f(t_1,t_2)/t_1\in\{0\div f_0\},\ t_2\in\{0\div f_1(t_1)\}\}$. Значит, $\Lambda(\Psi_{nq})=max\{t_1+t_2/(t_1,t_2)\in D=$
$=max\{t+f_1(t)/t\in\{0\div f_0\}\}=f_0+f_1(f_0)=Q_1(f_0)$, так как $f_1\in \mathcal{Z}_1=G$ и, следовательно, $\alpha=(f_0,f_1(f_0))=$
$=(a_0,a_1)(f_0)$ является решением.

2. Предположим, что для любой последовательности $\Psi_{n-1q}=\{f_0\}\cup F_{n-1q}$, $n>1$, такой, что $F_{n-1q}\in\mathcal{Z}$ и $D(\Psi_{n-1q})\neq\emptyset$, имеет место утверждение теоремы.

3. Пусть $n>1$, $\Psi_{nq}=\{f_0\}\cup F_{nq}$, $F_{nq}\subset\mathcal{Z}$ и $D(\Psi_{nq})\neq\emptyset$. Тогда для всякого $t\in\{0\div f_0\}$ в силу 2 для задачи $S_t(Z(\Psi_{nq}))$ 1), имеющей размерность n, вектор $(a_1(t),a_2(t),\ .\ .\ .\ ,a_n(t))$ является решением и $\Lambda(S_t(\Psi_{nq}))=a_1(t)+\ \cdot\ \cdot\ \cdot+a_n(t)=Q_n(t)-t$. Заметим, что $max\{\langle\tau\rangle/\tau\in D\}=\Lambda(\Psi_{nq})=max\{t+\Lambda(S_t(\Psi_{nq}))/t\in$
$\in\{0\div f_0\}\}=max\{Q_n(t)/t\in\{0\div f_0\}\}=Q_n(f_0)$, так как $Q_n\in G^*$. Отсюда $\alpha=(a_0(f_0),a_1(f_0),\ .\ .\ .\ ,a_n(f_0))\in\tilde{D}(\Psi_{nq})$, так как $\alpha\in D(\Psi_{nq})$ и $\langle\alpha\rangle=Q_n(f_0)=\Lambda(\Psi_{nq})$.

Следствие. $\tilde{d}=d_{Q_n}(0,f_0)=\{t_0\div f_0\}$, где $t_0=min\{t/t\in\{0\div f_0\}$ и $Q_n(t)=Q_n(f_0)\}$.

Доказательство. 1. Пусть $t\in\tilde{d}$, тогда $(a_1(t),\ldots$
$\ldots,a_n(t))\in\tilde{D}_t$ и, значит, $(t,a_1(t),\ .\ .\ .\ ,a_n(t))\in\tilde{D}$. Отсюда $Q_n(t)=Q_n(f_0)=\Lambda$ и $\tilde{d}\in d_{Q_n}(0,f_0)$.

2. Пусть $t\in\{0\div f_0\}$ и $Q_n(t)=Q_n(f_0)=\Lambda$. Так как для всякого $t\in\{0\div f_0\}(t,a_1(t),\ .\ .\ .\ ,a_n(t))\in D$, то $(t,a_1(t),\ .\ .\ .\ ,a_n(t))\in\tilde{D}$ и, значит, $t\in\tilde{d}$. Отсюда $d_{Q_n}(0,f_0)\subset\tilde{d}$, следовательно, $d_{Q_n}(0,f_0)=\tilde{d}$.

3. Так как $Q_n\in G^*$, то согласно лемме 1.5 $d_{Q_n}(0,f_0)=\{t_0\div f_0\}$, где $t_0=min\{t/t\in\{0\div f_0\}$ и $Q_n(t)=Q_n(f_0)\}$.

Таким образом, лемма 2.1., теорема 2.1 и следствие дают эффективную итеративную процедуру решения задачи $Z(\Psi_{nq})$ для любой последовательности Ψ_{nq}, такой, что $F_{nq}\in\mathcal{Z}$ и $D(\Psi_{nq})\neq\emptyset$.

1) $F_{nq}\subset\mathcal{Z}\Longrightarrow S_t(F_{nq})\in\mathcal{Z}$.